Kurzlösung - Technische Mechanik II WiSe 2023/24
(22. Februar 2024)

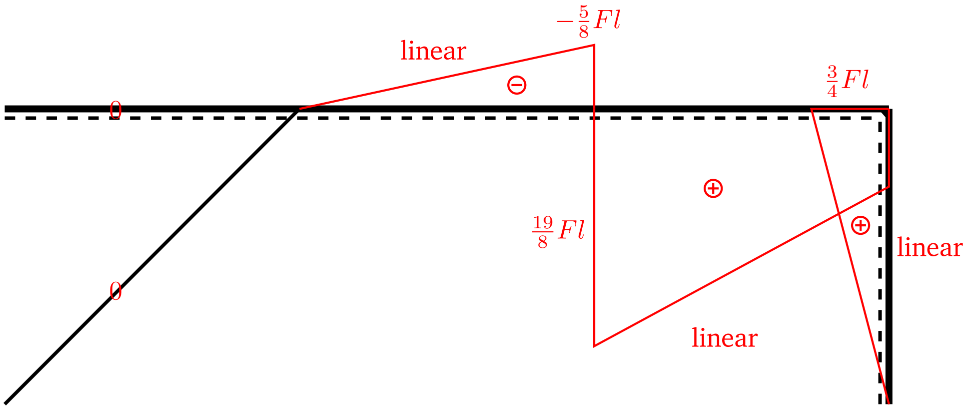
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Aufgabe 1 (BI) [22 Punkte]

a)

$$S = \frac{5\sqrt{2}}{8}F$$

b)



c)

$$\Delta l = \frac{5\sqrt{2}}{4}\frac{Fl^3}{EI}$$

Aufgabe 1 (G/UI) [22 Punkte]

a)

$$v_1 = \sqrt{\frac{c}{m}u^2 - 2g(h+u)}$$
$$v_2 = \sqrt{\frac{c}{m}u^2 - 2g(h+u+l)}$$
$$v_3 = \sqrt{\frac{c}{m}u^2 - 2g(h+u+2l)}$$

b)

$$u_{\min} = \frac{mg}{c} + \sqrt{\left(\frac{mg}{c}\right)^2 + 2\frac{mg}{c}(h+2l)}$$

c)

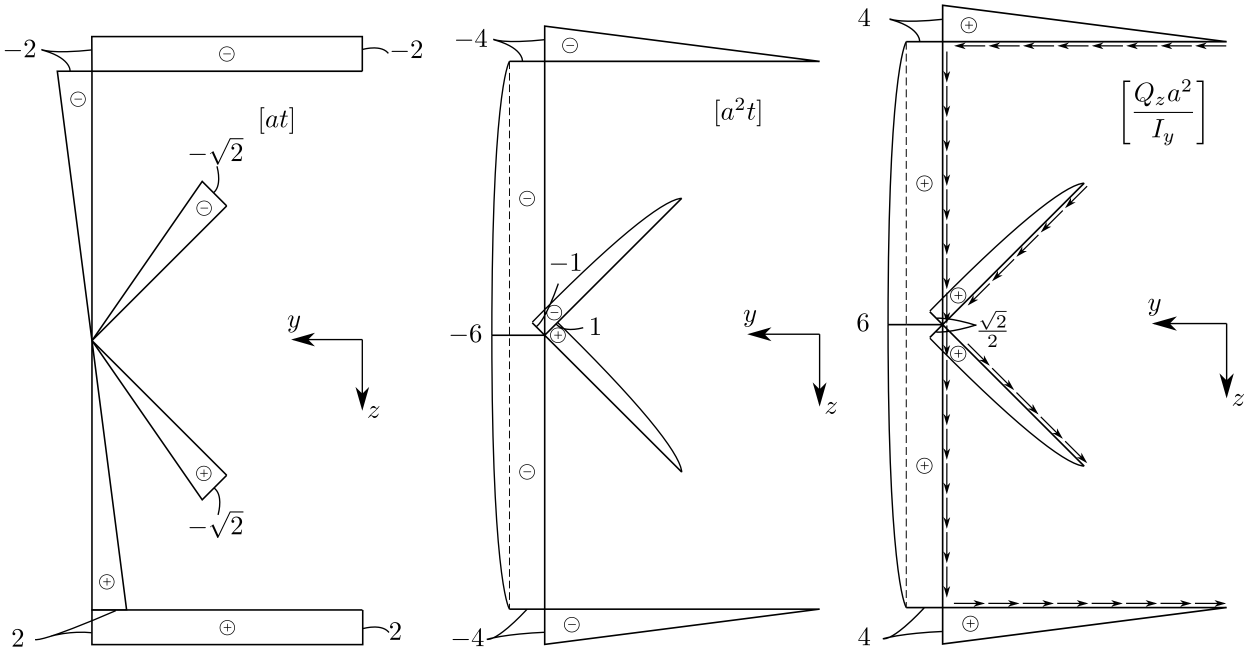
$$y(x) = -\frac{2g}{v_3^2}x^2 + \sqrt{3}x$$

d)

$$u_4 = \frac{mg}{c} + \sqrt{\left(\frac{mg}{c}\right)^2 + 2\frac{mg}{c}\left(h + \frac{18+8\sqrt{3}}{11}l\right)}$$

Aufgabe 2 [20 Punkte]

a) Verläufe:



(a) z-t-Verlauf (b) S_y-Verlauf (c) $\tau(s)$-Verlauf

b)

$$e_m = \frac{12}{17}a$$

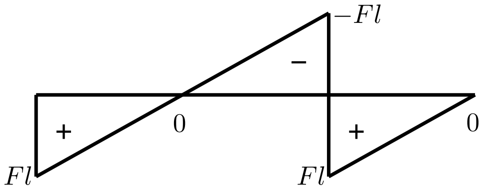
Aufgabe 3 [15 Punkte]

a)

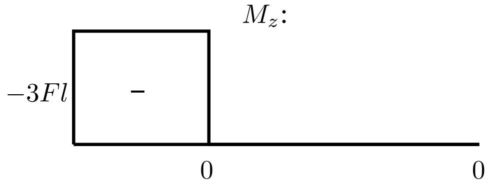
$$I_y = \frac{865}{42}a^4$$
$$I_z = \frac{386}{21}a^4$$
$$I_{yz} = \frac{8}{7}a^4$$

b)

M_y:



M_z:



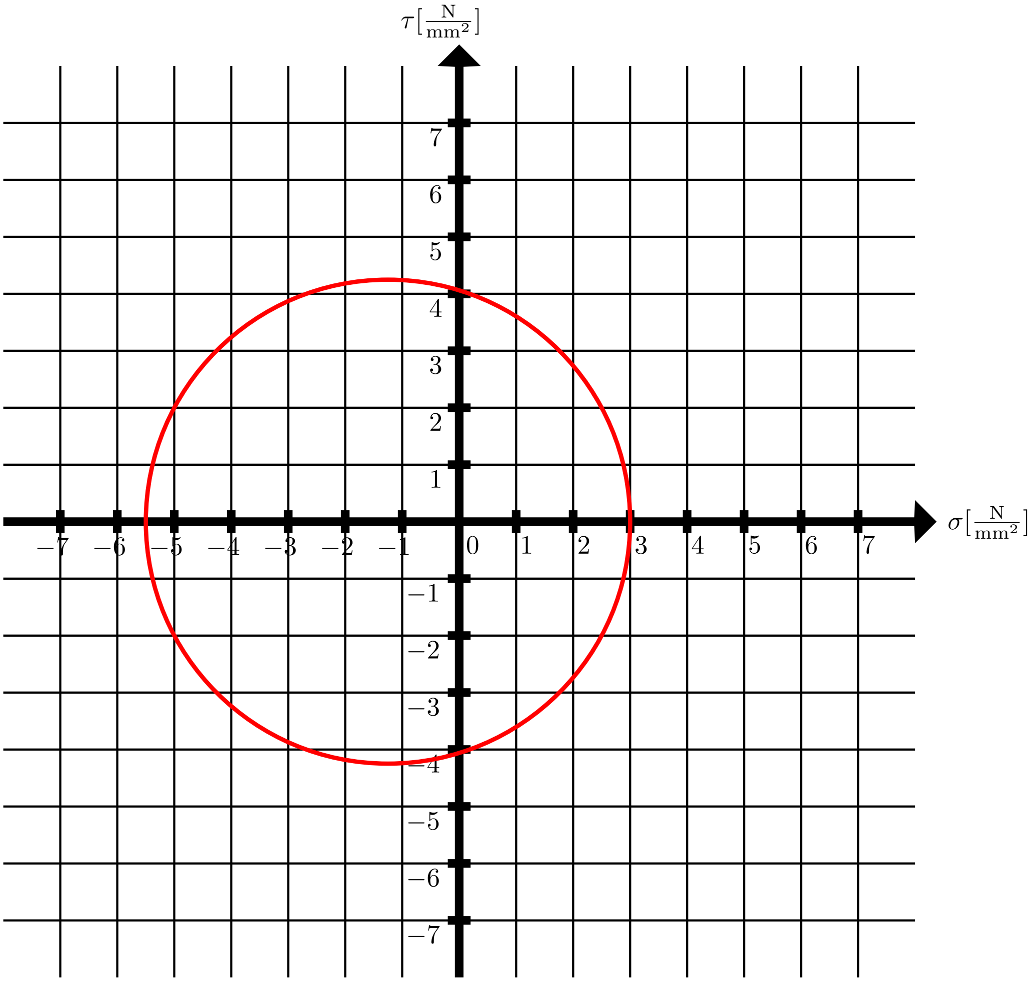
c)

$$\sigma_x(x=0,y,z) = \frac{1}{47534}\frac{Fl}{a^4}\left[2748z + 7929y\right]$$

Kurzfrage 1 [5 Punkte]

Skizzieren Sie den Mohrschen Spannungskreis für den durch σ gegebenen Spannungszustand in das folgende σ,τ-Koordinatensystem und bestimmen Sie die mittlere Normalspannung σ_M, die Hauptnormalspannungen $\sigma_{1,2}$ sowie die maximale Schubspannung $\tau_{\max}$ und tragen Sie Ihre Ergebnisse **mit Einheiten** in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \text{ mit } \sigma_x = -5\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2},\ \sigma_y = 2{,}5\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2},\ \tau_{xy} = 2\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2},$$



$\sigma_M =$ $1{,}25\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

$\tau_{\max} =$ $4{,}25\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

$\sigma_1 =$ $3\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

$\sigma_2 =$ $-5{,}5\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

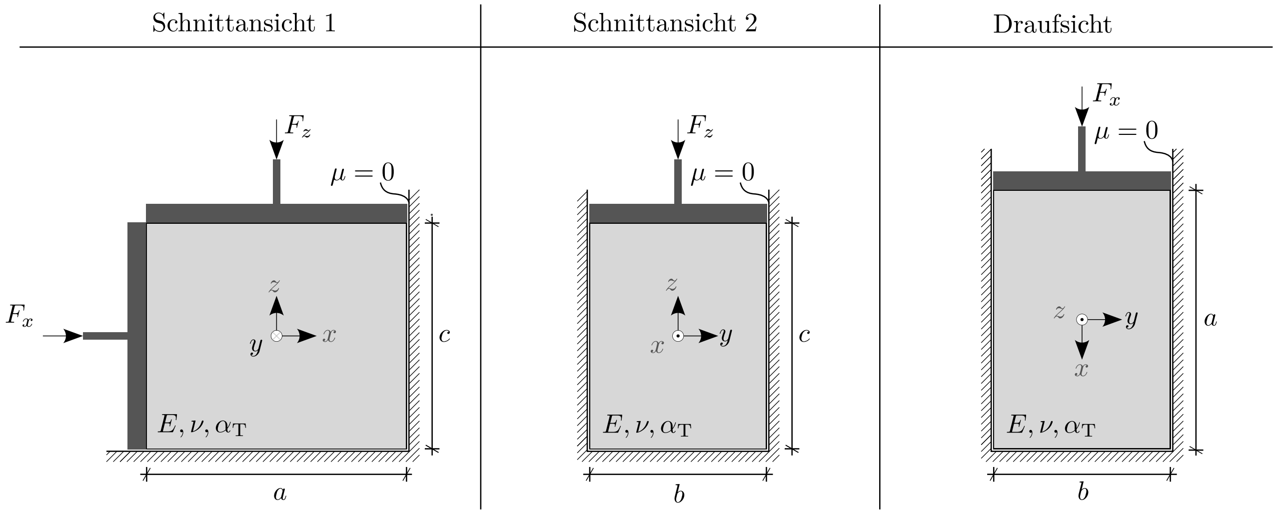
Kurzfrage 2 [7 Punkte]

Ein gewichtsloser Quader (Breite a, Tiefe b, Höhe c, Elastizitätsmodul E, Querkontraktionszahl ν) liegt in der Ecke eines Raumes, dessen Wände und Boden als starr und glatt (Reibkoeffizient $\mu = 0$) angenommen werden können. Im dargestellten Zustand ist der Quader spannungsfrei. Über zwei Stempel wird der Quader mit Hilfe der Kräfte F_x in x-Richtung und F_z in z-Richtung zusammengedrückt.

a) Geben Sie die Normalspannungen σ_x, σ_y, σ_z und die Dehnungen ε_x, ε_y und ε_z im verformten Zustand in den dafür vorgesehenen Kästchen an.

b) Berechnen Sie, wie groß das Verhältnis von F_x zu F_z sein muss, sodass die Höhe des Quaders im Vergleich zum Ausgangszustand unverändert ist ($\Delta c = 0$). Tragen Sie Ihr Ergebnis in das dafür vorgesehene Kästchen ein.

Gegeben: a, b, c, E, ν, F_x, F_z, $\mu = 0$



$\sigma_x = \boxed{-\dfrac{F_x}{bc}}$

$\varepsilon_x = \boxed{\dfrac{1}{E}\left((\nu^2-1)\dfrac{F_x}{bc} + (\nu^2+\nu)\dfrac{F_z}{ab}\right)}$

$\sigma_y = \boxed{-\nu\left(\dfrac{F_x}{bc} + \dfrac{F_z}{ab}\right)}$

$\varepsilon_y = \boxed{0}$

$\sigma_z = \boxed{-\dfrac{F_z}{ab}}$

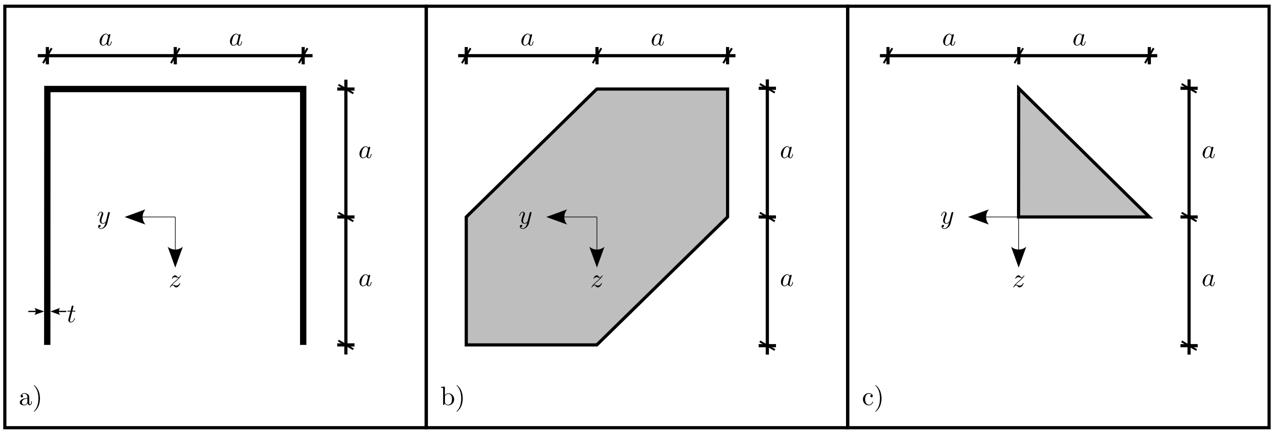
$\varepsilon_z = \boxed{\dfrac{1}{E}\left((\nu^2-1)\dfrac{F_z}{ab} + (\nu^2+\nu)\dfrac{F_x}{bc}\right)}$

$\dfrac{F_x}{F_z} = \boxed{\dfrac{1-\nu}{\nu}\,\dfrac{c}{a}}$

Kurzfrage 3 [3 Punkte]

Gegeben sind die folgenden 3 Querschnitte. Ist eine Wanddicke t angegeben, so handelt es sich um einen dünnwandigen Querschnitt ($t \ll a$). Kreuzen Sie in der unten stehenden Tabelle für die Querschnitte a) bis c) an, ob das Flächendeviationsmoment I_{yz} bezüglich der gegebenen y, z-Koordinatensysteme 0 oder von 0 verschieden ist. Aufgabenteile, in denen nicht genau eine Option angekreuzt wird, werden mit 0 Punkten bewertet.

Gegeben: $a,\ t\ \ (t \ll a)$

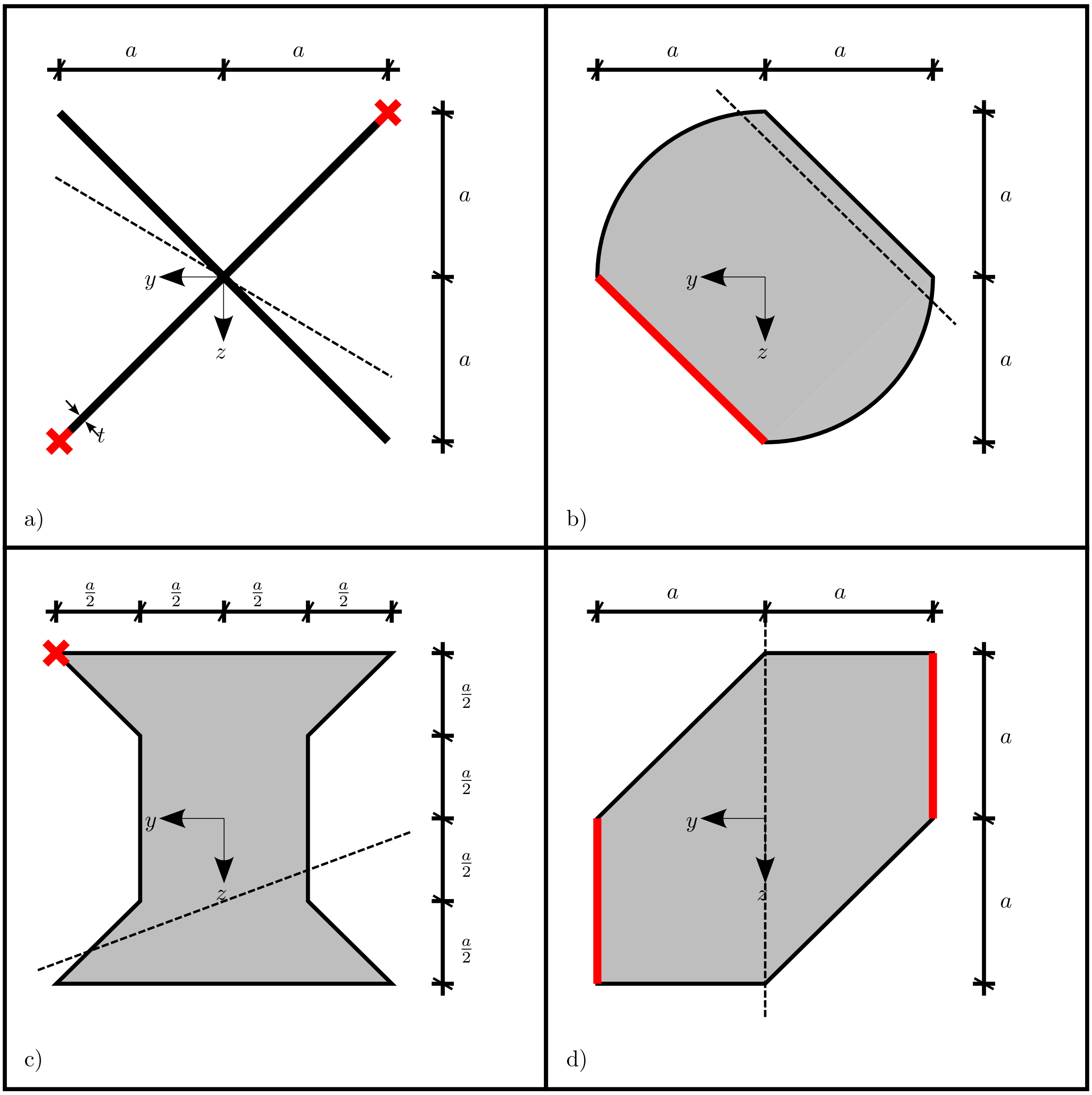


	$I_{yz} = 0$	$I_{yz} \neq 0$
a)	×	
b)		×
c)		×

Kurzfrage 4 [4 Punkte]

Gegeben sind die folgenden 4 Querschnitte. Ist eine Wanddicke t angegeben, so handelt es sich um einen dünnwandigen Querschnitt ($t \ll a$). In jedem der Querschnitte herrscht eine lineare Normalspannungsverteilung. Die Nulllinien dieser Normalspannungsverteilungen sind für jeden Querschnitt durch eine gestrichelte Linie gekennzeichnet. Markieren Sie in den abgebildeten Querschnitten die Stellen, an denen die Normalspannung σ_x für den jeweiligen Querschnitt betragsmäßig maximal ist. Für jede Teilaufgabe wird genau dann ein Punkt vergeben, wenn alle gesuchten Stellen und keine weiteren markiert wurden.

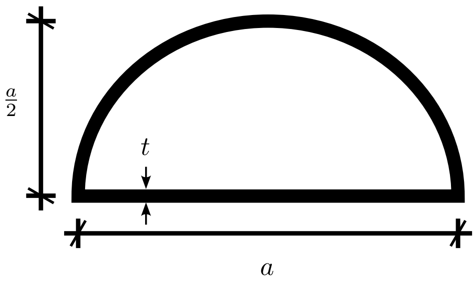
Gegeben: $a,\ t\ \ (t \ll a)$

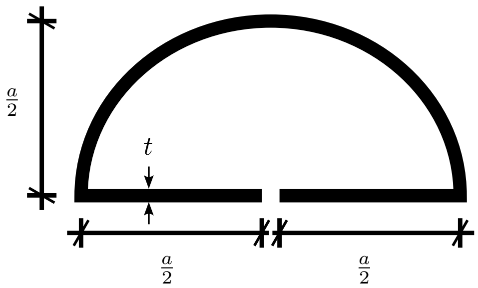


Kurzfrage 5 (BI) [2 Punkte]

Gegeben sind die beiden skizzierten dünnwandigen Profile (Wanddicke $t \ll a$). Das Torsionsträgheitsmoment des linken, geschlossenen Profils ist $I_{T,g}$, das Torsionsträgheitsmoment des rechten, offenen Profils ist $I_{T,o}$. Geben Sie an, welches der beiden Profile das größere Torsionsträgheitsmoment hat, indem Sie in das unten stehende Kästchen ein $>$ eintragen, wenn das geschlossene Profil das größere Torsionsträgheitsmoment hat, ein $<$, wenn das offene Profil das größere Torsionsträgheitsmoment hat, oder ein $=$, wenn beide Torsionsträgheitsmomente gleich groß sind.

Gegeben: $a,\ t\ \ (t \ll a)$





$I_{T,g}$ $\boxed{>}$ $I_{T,o}$

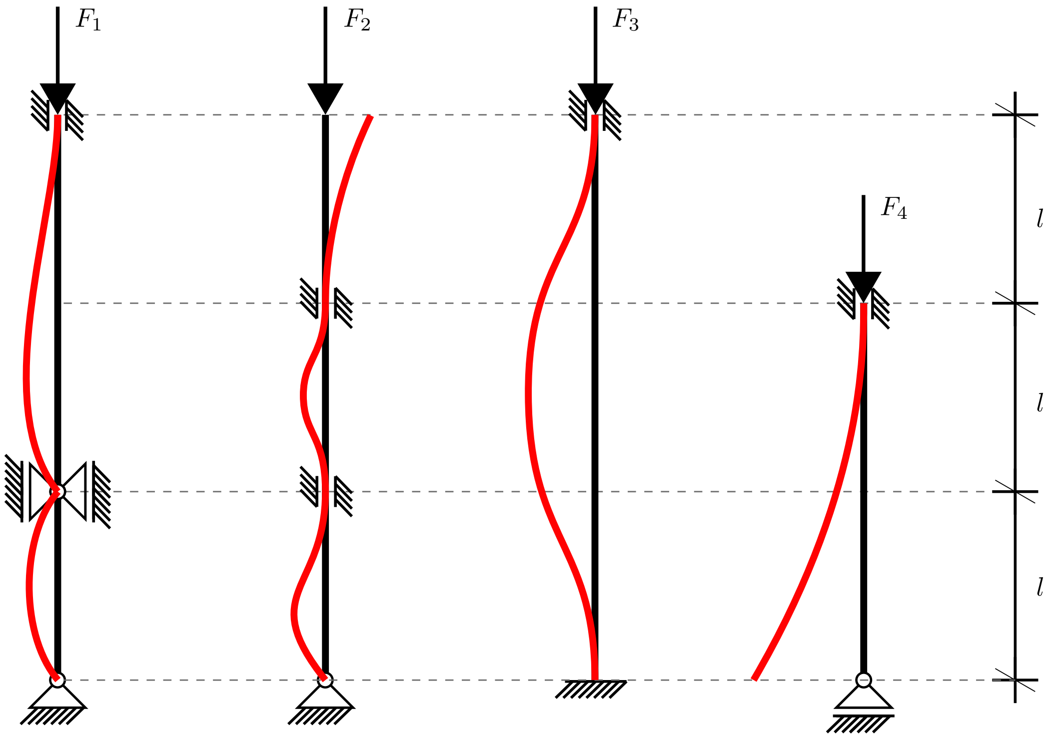
Kurzfrage 6 (BI) [5 Punkte]

Gegeben sind die vier skizzierten Stützen. Alle Stützen besitzen die gleiche Biegesteifigkeit EI. Die Stützen werden mit ihrer jeweiligen kritischen Knicklast $F_1 \ldots F_4$ belastet.

a) Zeichnen Sie in die Skizze für jede Stütze die zugehörige Knickfigur. Zeichnen Sie bei den Stützen mit mehreren Abschnitten für jeden Abschnitt die zugehörige Knickfigur.

b) Sortieren Sie die kritischen Knicklasten der Stützen nach der Größe, indem Sie jeweils den zugehörigen Index in die Ungleichung unten eintragen.

Gegeben: l, EI, $EA = \infty$



Stütze 1 Stütze 2 Stütze 3 Stütze 4

$$\boxed{F_1} > \boxed{F_3} > \boxed{F_2} > \boxed{F_4}$$

Kurzfrage 7 (BI) [7 Punkte]

Ein trapezprismaförmiger Körper (Breite b oben, $3b$ unten, Höhe h, Länge l in die dritte Raumrichtung, Dichte ρ_K) schwimmt in einer Flüssigkeit (Dichte ρ). Die untere Kante hat eine Eintauchtiefe von $z = \frac{h}{2}$. Der Umgebungsdruck kann vernachlässigt werden ($p_0 = 0$). Berechnen Sie

a) die Gewichtskraft G des schwimmenden Körpers,

b) die von der Flüssigkeit auf den schwimmenden Körper wirkende Auftriebskraft F_A,

c) das Verhältnis der Dichte der Flüssigkeit ρ zur Dichte des schwimmenden Körpers ρ_K,

d) die z-Koordinaten der Schwerpunkte des schwimmenden Körpers S_K und der verdrängten Flüssigkeit S_F sowie deren Abstand e,

e) das auf die x-Achse bezogene Flächenträgheitsmoment I_x der Schwimmfläche,

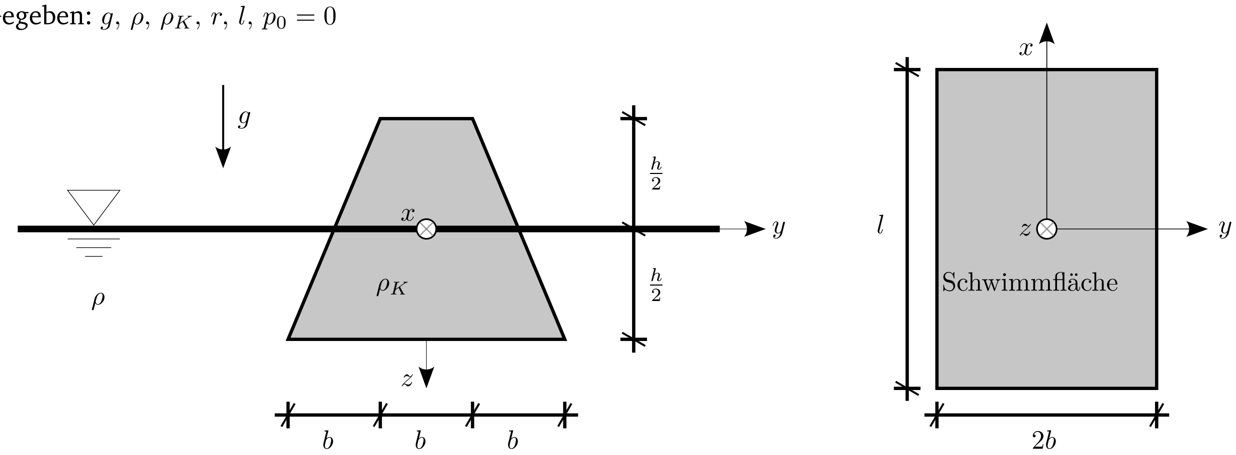
f) das Volumen V der verdrängten Flüssigkeit,

g) und den Abstand h_M von Schwerpunkt und Metazentrum des schwimmenden Körpers

und tragen Sie Ihre Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

h) Geben Sie an, in welcher Art von Gleichgewichtszustand der schwimmende Körper sich für $b = h$ befindet, indem Sie im unten stehenden Satz nur die korrekte Antwort ankreuzen.

Gegeben: g, ρ, ρ_K, r, l, $p_0 = 0$



$G =$ $2\rho_K gbhl$ | $F_A =$ $\frac{5}{4}\rho gbhl$ | $\frac{\rho}{\rho_K} =$ $\frac{8}{5}$

$z_{S_K} =$ $\frac{1}{12}h$ | $z_{S_F} =$ $\frac{4}{15}h$ | $e =$ $\frac{11}{60}h$

$I_x =$ $\frac{2}{3}b^3 l$ | $V =$ $\frac{5}{4}bhl$ | $h_M =$ $\frac{8}{15}\frac{b^2}{h} - \frac{11}{60}h$

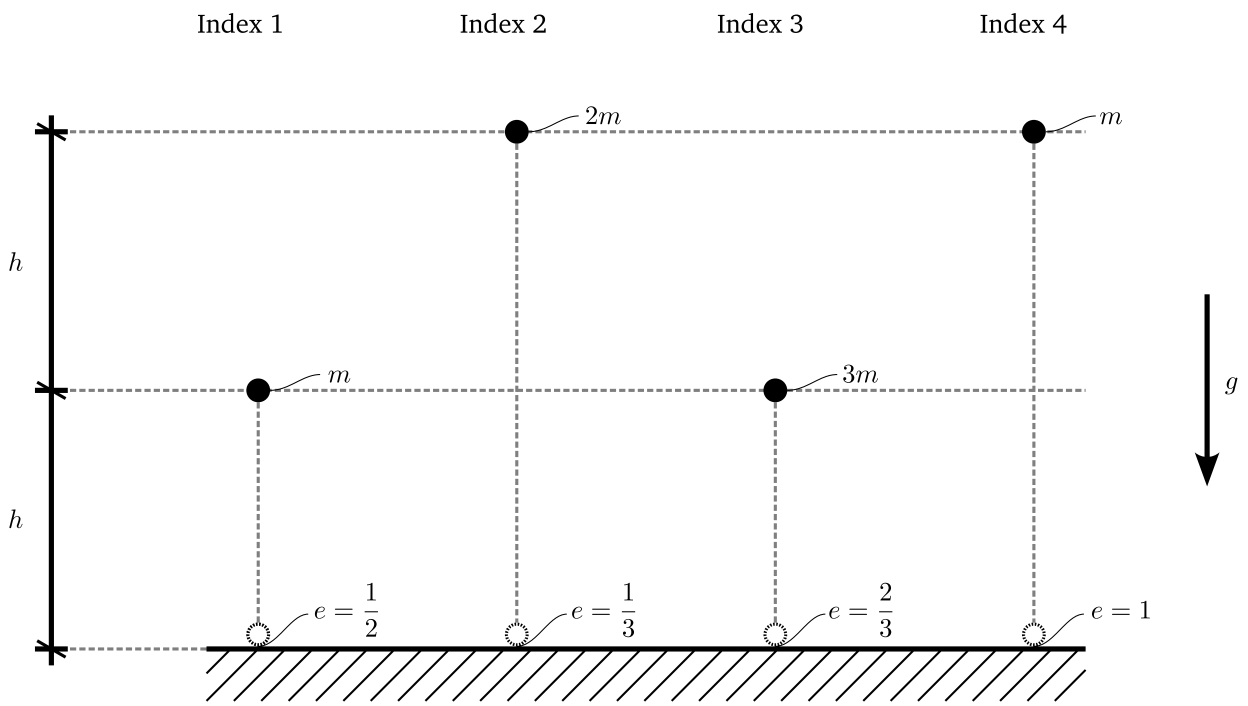
Der schwimmende Körper befindet sich in einem × stabilen ☐ instabilen ☐ indifferenten Gleichgewichtszustand.

Kurzfrage 5 (G/UI) [2 Punkte]

Vier Massenpunkte mit verschiedenen Massen werden aus verschiedenen Höhen aus der Ruhe losgelassen und stoßen dann gegen die Unterlage mit verschiedenen Stoßzahlen.

Sortieren Sie die kinetischen Energien $\overline{E}_1$, $\overline{E}_2$, $\overline{E}_3$ und $\overline{E}_4$ der Punktmassen unmittelbar nach dem Stoß nach der Größe, indem Sie die zugehörigen Indizes in die Ungleichung unten eintragen.

Gegeben: $m,\ g,\ h,\ m_1 = m,\ m_2 = 2m,\ m_3 = 3m,\ m_4 = m,\ h_1 = h,\ h_2 = 2h,\ h_3 = h,\ h_4 = 2h,\ e_1 = \frac{1}{2},\ e_2 = \frac{1}{3},$ $e_3 = \frac{2}{3},\ e_4 = 1$

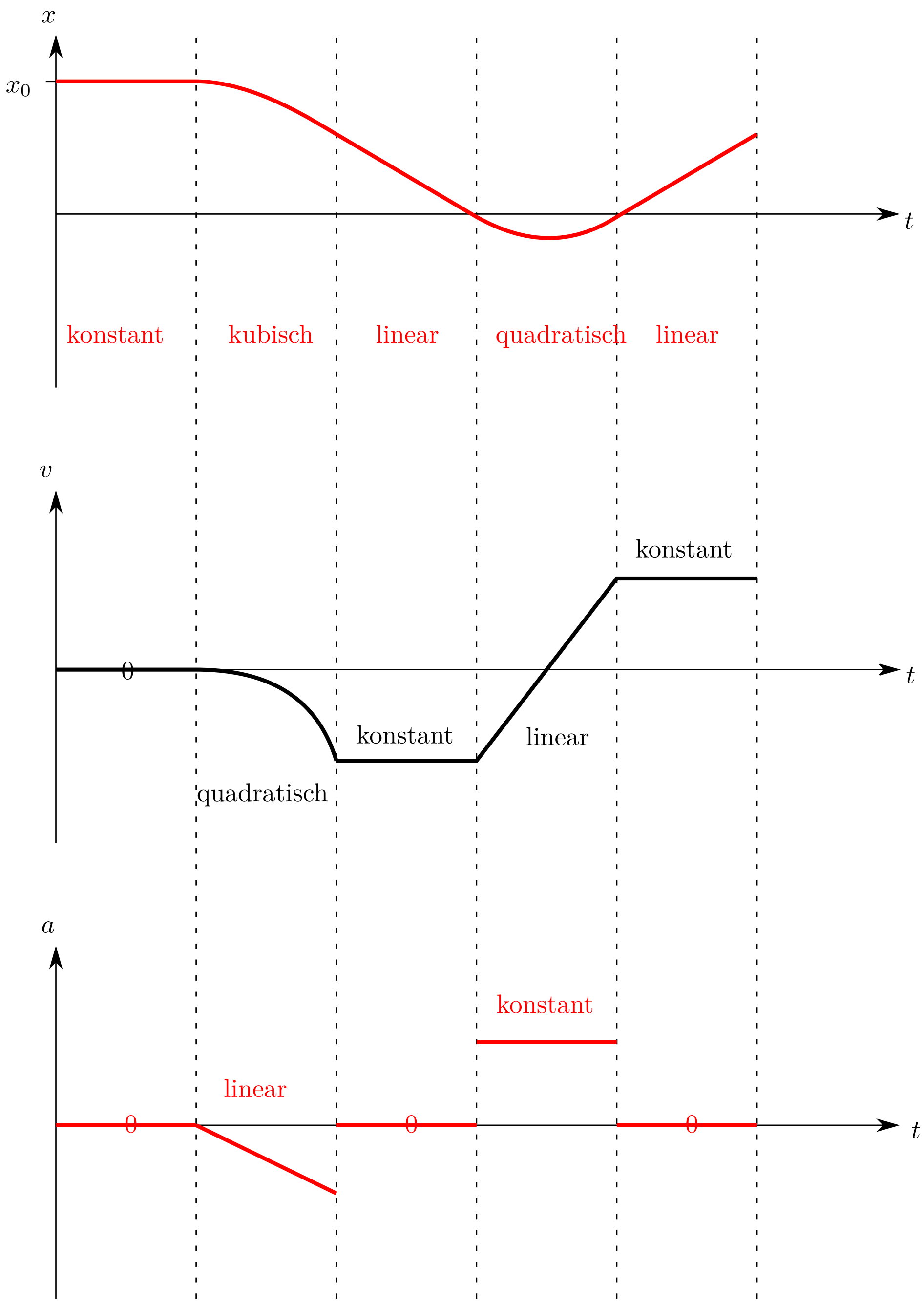


$$\boxed{\overline{E}_4} > \boxed{\overline{E}_3} > \boxed{\overline{E}_2} > \boxed{\overline{E}_1}$$

Kurzfrage 6 (G/UI) [5 Punkte]

Gegeben ist das skizzierte Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm $v(t)$. Skizzieren Sie qualitativ das zugehörige Weg-Zeit-Diagramm $x(t)$ und das Beschleunigungs-Zeit-Diagramm $a(t)$ in die folgende Abbildung. Beschriften Sie zudem die Art der Verläufe (Null, konstant, linear, quadratisch, ...).

Gegeben: $x(t = 0) = x_0$



Kurzfrage 7 (G/UI) [7 Punkte]

Ein Punkt P bewegt sich in der Ebene entlang einer Bahn

$$\vec{r}(s(t)) = -\frac{\sqrt{2}}{2}s(t)\vec{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2}s(t)\vec{e}_y,$$

wobei x und y die Koordinaten eines kartesischen Koordinatensystems sind. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich der Punkt bei $s(t = 0) = 0$ und hat eine Bahngeschwindigkeit von $v_0 > 0$. Der Punkt wird mit einer konstanten Bahnbeschleunigung mit Betrag $a_0 > 0$ abgebremst, bis er zum Stillstand kommt. Berechnen Sie

a) die Zeit Δt, die bis zum Stillstand des Punktes vergeht, und

b) die Position des Punktes P, nachdem er zum Stillstand gekommen ist, sowohl in kartesischen Koordinaten als auch Polarkoordinaten, das heißt $x(t = \Delta t)$, $y(t = \Delta t)$, $r(t = \Delta t)$ und $\varphi(t = \Delta t)$

und tragen Sie Ihre Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

Gegeben: $v_0 > 0$, $a_0 > 0$

$\Delta t =$	$\frac{v_0}{a_0}$
$x(t = \Delta t) =$	$-\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{v_0^2}{a_0}$
$y(t = \Delta t) =$	$\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{v_0^2}{a_0}$
$r(t = \Delta t) =$	$\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{a_0}$
$\varphi(t = \Delta t) =$	$\frac{3}{4}\pi$